

УДК 519.634

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА НА ГЕКСАЭДРАЛЬНЫХ СЕТКАХ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА С РАЗРЫВНЫМИ БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ¹⁾

© 2010 г. А. В. Волков

(140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ФГУП “ЦАГИ”)

e-mail: andrey.wolkov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2009 г.

Метод Галеркина с разрывными базисными функциями высокого порядка адаптирован к решению стационарных пространственных уравнений Эйлера и Навье–Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. В качестве итерационного метода решения используется гибридный многосеточный алгоритм, включающий конечно-элементную и сеточную стадии. Приводятся примеры расчетов: невязкое обтекание сферы, вязкое течение внутри изогнутой трубки и турбулентное обтекание крыла. Результаты расчетов и вычислительные затраты сопоставлены с результатами, получаемыми методом конечного объема. Библ. 20. Фиг. 8. Табл. 2.

Ключевые слова: метод Галеркина с разрывными базисными функциями, многосеточный метод, схема высокого порядка точности, пространственные уравнения Эйри и Навье–Стокса, неструктурированные гексаэдральные сетки.

ВВЕДЕНИЕ

Для повышения точности численного расчета обтекания тел сложных геометрических форм необходимо использовать очень мелкие расчетные сетки. Убедительная демонстрация этого факта приводится в трудах известной конференции, посвященной прецизионному расчету сопротивления крейсерской конфигурации летательного аппарата “крыло + фюзеляж” (см. [1]). Здесь отмечается, что использование сеток с количеством ячеек порядка 20 миллионов оказывается недостаточным для приемлемой точности результатов. Можно предположить, что для достоверного расчета взлетно-посадочных конфигураций самолета с оценкой такой важной характеристики, как аэродинамическое качество, нужны сетки в сотню миллионов ячеек. Отметим, что известные промышленные коды расчета обтекания аэродинамических компоновок, такие как FLUENT и CFX, базируются на методе конечного объема (МКО) второго порядка точности по пространству и требуют значительных компьютерных ресурсов для решения подобных задач.

Известно, что пути снижения вычислительных затрат связаны как с проведением расчетов на сильно анизотропных адаптивных сетках, так и с использованием методов высокого порядка точности. Одним из перспективных подходов к аппроксимации является метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ, см. [2], [3]), или DGM в англоязычной литературе. Метод вызывает большой интерес вследствие своей общности, гибкости и ясной теоретической базы. Он обладает рядом достоинств по сравнению с МКО, в частности при расчетах на сильно анизотропных адаптивных сетках (см. [4]). На структурированных сетках РМГ использован в [5], а на тетраэдральных неструктурированных сетках применен в [6]. Разумеется, и другие методы высокого порядка точности могут быть использованы в качестве альтернативы МКО второго порядка точности. В [7] дан обзор различных подходов к аппроксимации высокого порядка.

Гексаэдральные расчетные сетки имеют очевидное преимущество по сравнению с сетками, образованными тетраэдрами, так как, обеспечивая то же самое покрытие расчетной области, сетки из гексаэдров имеют меньшее количество внутренних граней, что сокращает общее коли-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00243а).

чество арифметических операций в расчете. Поэтому в настоящей работе РМГ с полиномиальными базисными функциями степени $K \leq 3$ адаптирован к решению уравнений Эйлера и Навье–Стокса именно на неструктурированных гексаэдральных сетках.

Отметим, что теоретический анализ (см. [3]) сходимости РМГ K -схемы к точному гладкому решению оценивает ее порядок точности в диапазоне от $K + 1/2$ до $K + 1$, в зависимости от типа сетки. Численные эксперименты в [2], [3], выполненные на последовательности вложенных сеток с ячейками произвольной формы, демонстрируют, что решения по мере уменьшения характерного размера сеточных ячеек стремятся к аналитическому решению с оптимальным порядком $K + 1$. Поэтому мы называем схему ($K = 3$) схемой четвертого порядка точности.

Как в МКО, так и в РМГ расчет сложных задач связан с необходимостью решения систем уравнений с большим количеством неизвестных. Эффективный “решатель” является основой любого расчетного кода. Именно он и определяет успех тех или иных методов аппроксимации при решении практических задач. Основу реализованного в работе метода решения составил так называемый p -многосеточный метод. Традиционный многосеточный метод был предложен в [8] и получил широкое распространение. В методе конечного элемента (МКЭ) и, в частности, в РМГ высокая фактическая точность достигается за счет увеличения числа линейно независимых полиномов (базисных функций) в ячейке с соответствующим сокращением общего числа степеней свободы задачи по сравнению с МКО. Поэтому в последнее время философия построения многосеточного метода была пересмотрена (см. [9]). В [10]–[12] метод адаптирован для использования в МКЭ для многочленов высоких степеней $K > 1$.

В этом новом подходе, получившем название p -многосеточного метода, задача решается на фиксированной сетке, но с использованием различного набора базисных функций. Латинская буква p отражает теперь полиномиальный характер метода, а традиционный многосеточный метод на последовательности укрупняющихся сеток с недавнего времени предваряется буквой h .

В настоящей работе p -многосеточный метод впервые применен для решения пространственных уравнений Эйлера и Навье–Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. На примере решения модельных задач проведено тестирование порядка точности разработанного алгоритма и дана оценка компьютерных ресурсов. Рассмотрены задачи о невязком обтекании сферы, пространственном вязком течении внутри изогнутой трубки и турбулентном обтекании изолированного крыла. Полученные результаты сопоставлены с результатами промышленного кода из [16], основанного на методе конечного объема.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) = \mathbf{S}. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор консервативных переменных $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$; $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ – невязкий, а $\mathbf{F}_v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})$ – вязкий потоки; \mathbf{S} – источниковый член, возникающий при использовании модели турбулентности. Система уравнений (1.1) решается в трехмерной области с краевыми условиями, типичными для задач обтекания. Решение в каждой ячейке записывается в примитивных переменных $\mathbf{Q} = (\rho, u, v, w, p)$. Давление p и полная энергия E связаны уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

Уравнения Навье–Стокса в примитивных переменных имеют вид

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{U}(\mathbf{Q})) - \mathbf{F}_v(\mathbf{U}(\mathbf{Q}), \nabla \mathbf{U})) - \mathbf{S} = 0, \quad (1.2)$$

где матрица $\Gamma = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \right)$ есть якобиан преобразования от консервативных переменных к примитивным.

В РМГ в каждой ячейке сетки определяются локальные полиномиальные базисные функции $\varphi_j(\mathbf{x})$, линейная комбинация которых и определяет искомое решение в ячейке:

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{K_f} \mathbf{u}_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{u}_j(t)$ – вектор коэффициентов разложения, которые должны быть определены в процессе решения, K_f – количество базисных функций в ячейке, которое связано с максимальной степенью базисного полинома K следующим образом:

$$K_f = \frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{6}. \quad (1.4)$$

Здесь использованы значения $K = 0, 1, 2$ и 3 , что соответствует числу базисных функций $K_f = 1, 4, 10$ и 20 . Набор базисных функций имеет вид

$$\varphi_j = \frac{(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma}{h_x^\alpha h_y^\beta h_z^\gamma}, \quad j = 1, 2, \dots, K_f, \quad 0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq K. \quad (1.5)$$

Здесь x_0, y_0, z_0 – некая внутренняя точка гексаэдра, а величины h_x, h_y, h_z определяют размер ячейки вдоль соответствующих осей. Численные расчеты показали, что именно такая нормализация обеспечивает наилучшую фактическую точность и сходимость, особенно в случае решения задач вязкого обтекания на сетках с сильно вытянутыми ячейками.

Система сеточных уравнений для коэффициентов $\mathbf{u}_j(t)$ из (1.3) получается в соответствии со стандартной процедурой метода конечного элемента Галеркина, в котором требуется ортогональность невязки (левой части системы (1.2)) каждой базисной функции, используемой в реконструкции решения. Требование ортогональности формулируется через условие равенства нулю интеграла от произведения решаемых уравнений на каждую из базисных функций $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, K_f$). После интегрирования по частям имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_i \Gamma \mathbf{Q} d\Omega = - \oint_{\Sigma} \varphi_i (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_i S d\Omega. \quad (1.6)$$

Здесь $d\Sigma$ – элемент площади ячейки, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – внешняя нормаль, а $d\Omega$ – элемент объема ячейки.

Уравнение (1.6) состоит из объемных и поверхностных интегралов, вычисление которых требует знания величин потоков не только внутри, но и на границе ячейки. Однако здесь значения примитивных переменных терпят разрыв. Определение правил вычисления потоков на границах ячеек играет ключевую роль в построении схемы аппроксимации.

Как и в МКО, в РМГ величина невязкого потока на границе между двумя ячейками определяется в результате решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. В настоящей работе используется приближенная, линеаризованная методика решения задачи Римана по методу Роу (см. [13]):

$$\mathbf{F}_{\text{грань}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{U}^L - \mathbf{U}^R).$$

Здесь верхние символы L и R означают, что величины вычисляются, соответственно, с левой и правой стороны грани, а матрица \mathbf{A} является матрицей Якоби невязкого потока:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{U}}.$$

Вязкие потоки определяются через градиенты примитивных переменных $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$, где $\nabla \mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} \right)$, которые могут быть найдены путем непосредственного дифференцирования формулы (1.3). Однако, как известно (см., например, [3]), такой способ вычисления градиентов приводит к потере аппроксимации. Поэтому в РМГ для вычисления вязких потоков гра-

диенты примитивных переменных также представляются в виде линейной комбинации базисных функций:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{K_f} \mathbf{g}_{i,j}(t) \varphi_j(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Здесь $i = 1, 2$ и 3 соответствуют координатам x, y и z . В методе Галеркина тестовые функции являются базисными функциями. После умножения уравнения (1.7) на эти функции и интегрирования по частям получаем следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения $\mathbf{g}_{i,j}$:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{K_f} \mathbf{g}_{i,j} \varphi_j \varphi_k d\Omega + \oint_{\Sigma} \varphi_k \mathbf{Q} n_i d\Sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \mathbf{Q} d\Omega = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K_f. \quad (1.8)$$

Решение системы (1.8) определяет градиенты примитивных переменных (1.7) и дает возможность вычислить вязкие потоки в ячейке.

Вычисление контурных интегралов в (1.6) и (1.8) требует знания вязких потоков и примитивных переменных на границах ячеек. Такие значения не могут быть получены осреднением. Правила аппроксимации (см. [3]) требуют переменного выбора левой или правой ячейки для реконструкции решения на границе. Так, если при вычислении вязких потоков в (1.6) значения аргументов выбраны из левой ячейки: $\mathbf{F}_v|_b = \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}^L, \nabla \mathbf{Q}^L)$, то в формуле (1.8) при вычислении контурных интегралов значения примитивных переменных следует брать из правой ячейки: $\mathbf{Q}|_b = \mathbf{Q}^R$.

Наконец, система нелинейных уравнений для коэффициентов $\mathbf{u}_j(t)$ получается из уравнения (1.6) и, в предположении малой вариации якобиана Γ внутри ячейки, имеем

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \Gamma^{-1} \mathbf{M}^{-1} \left[- \oint_{\Sigma} \varphi_i (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} \nabla \varphi_i (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_i \mathbf{S} d\Omega \right]. \quad (1.9)$$

Здесь \mathbf{M} – матрица интегралов от произведений различных базисных функций.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ И УЧЕТ КРИВИЗНЫ

Высокий порядок аппроксимации РМГ предполагает точное вычисление объемных и поверхностных интегралов в системе уравнений (1.9). Для этой цели используются квадратурные формулы Гаусса. Вычисление объемного интеграла внутри гексаэдра произвольной формы выполняется в параметрическом пространстве, в котором каждый гексаэдральный элемент имеет форму единичного куба. Это трикватратичное изопараметрическое преобразование построено на базе 20 узлов, из которых 8 – это вершины куба, а 12 являются центрами его ребер. В случае искривленной границы дополнительные узлы в центрах граничных ребер позволяют учитывать кривизну обтекаемой поверхности, представляя ее полиномом третьей степени. Это дает возможность получить высокий порядок точности в задачах с искривленной границей.

При таком подходе поверхностные и объемные интегралы содержат нелинейные якобианы преобразования, что накладывает более высокие требования к квадратурным формулам интегрирования и требует большего количества узловых точек. Таким образом, для вычисления объемных интегралов мы применяем квадратуры, точные для полиномов порядка $3K$. Отметим, что объем вычислений может быть сокращен при использовании бесквдратурного подхода, предложенного в [14]. Этот подход использован здесь только на грубых уровнях многосеточного решателя.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД УСКОРЕНИЯ

Решение системы сеточных уравнений (1.9) может осуществляться явным многошаговым методом Рунге–Кутты интегрирования по времени. Поиск стационарного решения позволяет использовать локальный шаг по времени, зависящий от размера ячейки, что заметно ускорят процесс сходимости – уменьшение величины невязки (правой части уравнения (1.9)) на заданное количество порядков.

Таблица 1

$K = 0$	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$
1	Базис набора $K = 0$ дополняется функциями x, y, z	Базис наборов $K = 0, 1$ дополняется функциями $x^2, y^2, z^2,$ xy, xz, yz	Базис наборов $K = 0, 1, 2$ дополняется функциями $x^3, y^3, z^3,$ $x^2y, x^2z, y^2x,$ $y^2z, z^2x, z^2y,$ xyz

Применение явного метода Рунге–Кутты практически не требует дополнительных ресурсов памяти, однако, несмотря на локальный шаг по времени и наличие 5-шаговой схемы, количество шагов, требующихся для достижения стационарного решения, может быть слишком велико. Значительное ускорение решения достигается за счет применения многосеточного метода.

Идеи p -многосеточного метода для МКЭ аналогичны идеям классического многосеточного метода. Уменьшение или увеличение максимального порядка K полиномов базисных функций, или, другими словами, изменение набора базисных функций в элементе, аналогично укрупнению или измельчению ячеек сетки. Использование базисных функций низкого порядка ($K = 0$) позволяет быстро разрешить низкочастотную компоненту решения и обеспечить коррекцию общего решения при максимальном наборе базисных функций.

В работе значительное повышение в скорости сходимости получается в результате комбинирования традиционного многосеточного метода и p -многосеточного метода. В основе первого метода использован агломерационный подход (см. [15], [16]), который применяется только на грубых уровнях с использованием максимально простой и надежной схемы аппроксимации ($K = 0$ – одна кусочно-постоянная функция). Затем на самой мелкой сетке выполняется постепенное наращивание количества используемых базисных функций, т.е. используется p -многосеточный метод.

В основе p -многосеточного метода лежит известная схема полной аппроксимации (см. [17]), применяемая обычно к решению нелинейных задач традиционным h -многосеточным методом.

Определим последовательность уровней многосеточного метода $l = 1, 2, \dots, L$ такую, что уровень $l + 1$ в сравнении с уровнем l имеет либо большее количество ячеек, либо большее количество базисных функций (степеней свободы). Для традиционного сеточного измельчения (h -измельчение) используется последовательность вложенных гексаэдральных сеток, генерируемая кодом (см. [16]) с использованием алгоритмов агломерации. При измельчении по степеням свободы (p -измельчение) используются наборы из базисных функций, представленные в табл. 1.

Здесь функции представлены условно, без нормировки (см. (1.5)).

Решаемая система уравнений Навье–Стокса (1.9) на самом верхнем (мелком) многосеточном уровне L может быть записана в виде

$$\frac{\Delta \mathbf{q}_L}{\Delta t} + \mathbf{R}_L(\mathbf{q}_L) = 0.$$

Ее решение может быть выполнено с использованием явных или неявных итерационных методов. Применение одной или нескольких итераций уменьшает лишь высокочастотную ошибку решения, но не позволяет решить задачу полностью. Поэтому данную операцию принято называть сглаживанием, а алгоритм, ее выполняющий, – сглаживателем. Применение сглаживателя позволяет получить коррекцию решения на верхнем L -слое:

$$\tilde{\mathbf{q}}_L = \mathbf{q}_L + \Delta \mathbf{q}_L.$$

Запишем теперь сеточные уравнения на более грубом (расположенном ниже) многосеточном уровне $l = L - 1$:

$$\frac{\Delta \mathbf{q}_l}{\Delta t} + \mathbf{R}_l(\mathbf{q}_l) = \mathbf{F}_l. \tag{3.1}$$

В этом уравнении правая часть \mathbf{F}_l позволяет учесть ошибку, связанную с потерей точности аппроксимации при переходе на нижний уровень, где уравнения записываются либо на более грубой сетке, либо с использованием полиномов меньшей степени.

Для определения правой части рассмотрим эту систему уравнений на двух последовательных уровнях: уровне l (уравнение (3.1)) и верхнем уровне $l+1$:

$$\mathbf{M} \frac{\Delta \mathbf{q}_{l+1}}{\Delta t} + \mathbf{R}_{l+1}(\mathbf{q}_{l+1}) = \mathbf{F}_{l+1}. \quad (3.2)$$

В следующих ниже формулах используются операторы переноса решения $I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]$ и невязки решения $\tilde{I}'_{l+1}[\mathbf{R}_{l+1}(\mathbf{q}_{l+1})]$ с высокого многосеточного уровня на более низкий уровень и оператор переноса решения с низкого на высокий уровень: $I'_{l-1}[\mathbf{q}_{l-1}]$. Эти операторы различаются для случаев h - и p -измельчений (детальное описание приведено ниже).

Итерационная схема должна быть построена таким образом, чтобы решение, перенесенное с более верхнего уровня на нижний $\mathbf{q}_l = I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]$, также являлось бы решением уравнения на нижнем уровне. Перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\mathbf{M} \frac{\Delta I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]}{\Delta t} + \mathbf{R}_l(I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]) = \mathbf{F}_l. \quad (3.3)$$

После перенесения уравнения (3.2) на нижний уровень имеем

$$\tilde{I}'_{l+1} \left[\mathbf{M} \frac{\Delta \mathbf{q}_{l+1}}{\Delta t} \right] + \tilde{I}'_{l+1}[\mathbf{R}_{l+1}(\mathbf{q}_{l+1})] = \tilde{I}'_{l+1}[\mathbf{F}_{l+1}]. \quad (3.4)$$

Вычитая из уравнения (3.3) уравнение (3.4), получаем рекуррентное соотношение для правой части:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{R}_l(I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]) + \tilde{I}'_{l+1}[\mathbf{F}_{l+1} - \mathbf{R}_{l+1}(\mathbf{q}_{l+1})]. \quad (3.5)$$

На самом верхнем уровне правая часть (3.2) обязана равняться нулю: $\mathbf{F}_{l=L} = 0$.

Высокочастотная ошибка на верхнем многосеточном уровне легко устраняется после применения одной или нескольких итераций сглаживания. В результате имеем следующую поправку к решению: $\tilde{\mathbf{q}}_l = \mathbf{q}_l^{(0)} + \Delta \mathbf{q}_l$, где начальное приближение для решения на более грубом уровне является результатом его переноса с верхнего уровня: $\mathbf{q}_l^{(0)} = I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}]$.

Решение уравнений (3.1) повторяется на каждом из уровней, включая самый нижний – нулевой, на котором используется самая грубая сетка и осуществляется кусочно-постоянное восполнение решения (используется одна базисная функция $\varphi_0 = 1$). Затем на основе полученного набора решений осуществляется коррекция на верхних многосеточных уровнях в соответствии со следующим правилом:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_l^{(\text{new})} &= \tilde{\mathbf{q}}_l + \mathbf{q}_{\text{корр}}, \\ \mathbf{q}_{\text{корр}} &= \{ I'_{l-1}[\tilde{\mathbf{q}}_{l-1} - I'^{-1}_{l-1}[\tilde{\mathbf{q}}_l]] \}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Фигурные скобки $\{\cdot\}$ обозначают осреднение по следующему правилу:

$$\{\theta\}_i = \frac{\sum_{f=1, N_f} \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_n) S_f}{\sum_{f=1, N_f} S_f}.$$

Здесь i – индекс элемента, а n – индекс соседнего элемента, отделенного от элемента i гранью f . Суммирование производится по всем сторонам элемента расчетной сетки, S_f – площадь соответствующей грани.

В алгоритм также введен демпфирующий множитель на поправку решения (3.6):

$$\mathbf{q}_{\text{корр}} = \mathbf{q}_{\text{корр}} D \frac{|\tilde{\mathbf{q}}_l|}{\max(|\tilde{\mathbf{q}}_l|, |I'^{-1}_{l-1}[\tilde{\mathbf{q}}_l]|, |\tilde{\mathbf{q}}_{l-1}|, \varepsilon)}, \quad (3.7)$$

который состоит из постоянного коэффициента D , варьирующегося в диапазоне значений от 0.25 до 0.75, и множителя, призванного уменьшить величину коррекции в случае внезапной пульсации решения на каком-либо из уровней. За малую величину ε принималось значение $1.e-20$.

3.1. h -Операторы интерполяции и сборки

В случае перевода решения с мелкой сетки на крупную используются следующие операторы сборки:

$$I'_{l+1}[\mathbf{q}_{l+1}] = \frac{\Sigma\{\mathbf{q}_{l+1}\}\Omega^{l+1}}{\Sigma\Omega^{l+1}}, \quad \tilde{I}'_{l+1}[\mathbf{R}_{l+1}] = \Sigma\{\mathbf{R}_{l+1}\}.$$

Здесь суммирование производится по всем ячейкам уровня $l + 1$, содержащимся внутри крупной ячейки уровня l , а Ω – объем ячейки.

Обратный перевод решения с крупной сетки на мелкую осуществляется простым оператором интерполяции $I'^{l+1}[\mathbf{q}_l] = \mathbf{q}_l$, означающим, что решения в каждой ячейке данной агломерации равны между собой и равны решению в объединяющей их крупной ячейке.

3.2. p -Операторы интерполяции и сборки

Операторы перевода решения между уровнями с разным количеством базисных функций в реконструируемом решении получаются из условия равенства решений в рассматриваемой ячейке, полученных в результате реконструкции в различном базисе:

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{u}_j^l \phi_j^l = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j^{l-1} \phi_j^{l-1}.$$

Количество различных функций в базисе определяется в соответствии с соотношением (1.4): $M = K_f(K^l)$, $m = K_f(K^{l-1})$. После умножения данного уравнения последовательно на каждую из функций базиса, в который переводят решение, и интегрирования по ячейке получаем операторы интерполяции I'^{l+1} и сборки I'_l :

$$\begin{aligned} I'^{l+1}[\mathbf{q}_l] &= [\mathbf{M}_{pp}]^{-1} \mathbf{M}_{qq} \mathbf{q}_l, \\ I'_l[\mathbf{q}_{l+1}] &= [\mathbf{M}_{qq}]^{-1} \mathbf{M}_{qp} \mathbf{q}_{l+1}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

а также оператор (3.9) для перевода невязки в соотношении (3.5), который, вообще говоря, может быть отличен от оператора (3.8):

$$\tilde{I}'_l[\mathbf{R}_{l+1}] = \mathbf{M}_{qp} [\mathbf{M}_{pp}]^{-1} \mathbf{R}_{l+1}. \tag{3.9}$$

Здесь \mathbf{M} – матрицы, каждый член которых определяется в соответствии со следующими правилами:

$$\mathbf{M}_{qq}^{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i^{l-1} \phi_j^{l-1} d\Omega, \quad \mathbf{M}_{pp}^{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i^l \phi_j^l d\Omega, \quad \mathbf{M}_{qp}^{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i^{l-1} \phi_j^l d\Omega, \quad \mathbf{M}_{pq}^{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i^l \phi_j^{l-1} d\Omega.$$

3.3. Стратегии p -многосеточного подхода

Изложенный выше алгоритм многосеточного метода использует множество параметров, настраиваемых при решении конкретных задач. В первую очередь, необходимо определить оптимальное количество уровней многосеточного метода. При p -измельчении это количество равно максимальной степени полиномов базисных функций. При h -измельчении количество вложенных сеток зависит от геометрической сложности и общего количества ячеек самой мелкой сетки. Предполагается, что расчет начинается на самом мелком (верхнем) сеточном уровне, затем решение переводится на уровень ниже и после нескольких итераций сглаживания (путем итерационного решения уравнения (3.1)) решение опять переводится на уровень ниже, и такая процедура выполняется вплоть до достижения самого грубого уровня. На следующем этапе осуществля-

ется коррекция на верхних многосеточных уровнях с использованием формулы (3.6). Весь этот полный цикл является одной многосеточной итерацией V-цикла. Данный алгоритм допускает варьирование как типа сглаживателя (явный или неявный метод), так и количества итераций применения сглаживателя и коэффициента демпфирования в выражении (3.7).

Малое количество неизвестных на нижних уровнях позволяет выполнять много итераций сглаживания, что и делается с целью увеличения эффективности сглаживателя при незначительном росте общих вычислительных затрат. В выполненных численных экспериментах на верхнем уровне использовалась одна итерация сглаживания, а по мере спуска к нижнему уровню число итераций увеличивалось на единицу.

В случае расчета некоторых сложных течений полный V-цикл многосеточного метода начинается после получения хорошего начального приближения. Процесс нахождения решения стартует на самой грубой сетке. Интерполяция решения с грубого на мелкий уровень является начальным приближением на следующей сетке, более высокого уровня. Таким образом, задействуется алгоритм многосеточного метода, содержащий на первом этапе только два уровня. Далее процедура повторяется с привлечением следующего, третьего уровня. Постепенно в расчет вовлекаются все более высокие уровни.

Сглаживатель на основе явного метода является наиболее экономичным алгоритмом. Скорость сходимости итерационного процесса при неизменной общей памяти может быть увеличена за счет применения неявного метода на грубых многосеточных уровнях. В неявном методе невязка $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ уравнения (3.1) вычисляется на верхнем временном слое $n + 1$, что приводит к системе уравнений относительно \mathbf{q}^{n+1} :

$$\frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} + \mathbf{R}(\mathbf{q}^{n+1}) = \mathbf{F}_l.$$

После разложения $\mathbf{R}(\mathbf{q}^{n+1})$ в ряд Тейлора поправка $\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n$ к вектору решения находится из следующей системы линейных уравнений:

$$\left[\frac{\mathbf{M}V_{\max}}{CFL} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}^n} \right] (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n) = -\mathbf{R}(\mathbf{q}^n), \quad (3.10)$$

или, после введения соответствующих обозначений, — из системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Как известно, такой неявный метод при точном LU-разложении матрицы \mathbf{A} требует использования значительных объемов оперативной памяти. С целью экономии памяти в настоящей работе предложено на верхнем многосеточном уровне использовать блочный метод Гаусса—Зейделя. При этом в матрице Якоби \mathbf{A} учитываются только диагональные блоки, отражающие взаимное влияние переменных внутри только одного элемента. Учет влияния соседних элементов отсутствует. Для конечно-элементного метода высокого порядка точности такой подход наиболее эффективен, так как решение формируется во многом за счет большого количества переменных внутри ячеек. Поэтому мы называем такой подход локально-неявным методом. Это название, на наш взгляд, точнее передает суть данного численного алгоритма.

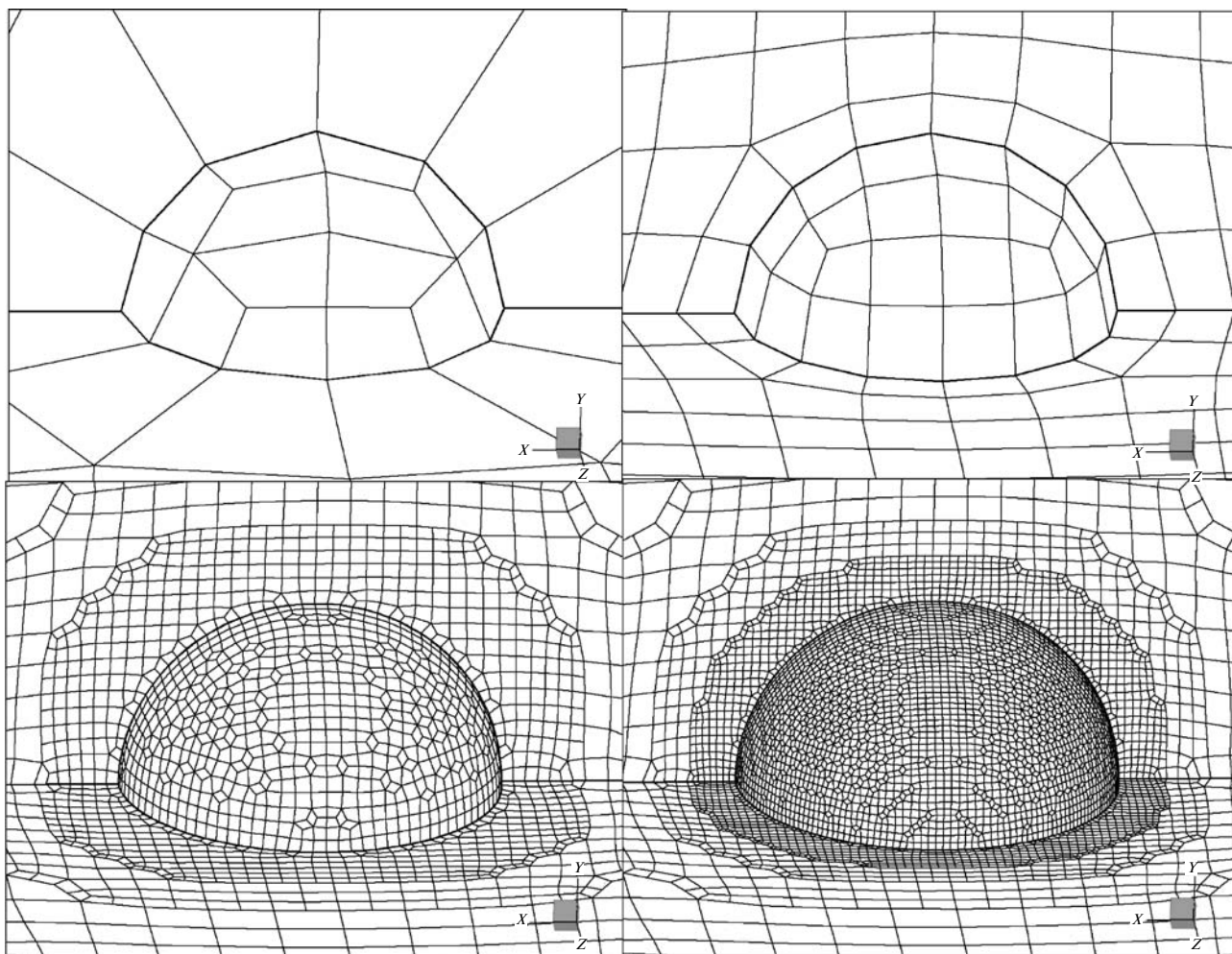
Приведенные ниже расчеты выполнены методом РМГ с использованием локально-неявного сглаживателя в p -многосеточном подходе.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

4.1. Обтекание сферы невязким потоком

Серия расчетов обтекания сферы дозвуковым потоком невязкого сжимаемого газа при числе Маха $M = 0.15$ выполнена на последовательности вложенных сеток с использованием кусочно-линейного, квадратичного и кубического полиномиальных базисов. Фрагменты сеток, сгенерированных около четверти сферы, представлены на фиг. 1. Ячейками неструктурированных сеток являются гексаэдры. Расчеты с высоким порядком точности (квадратичный и кубичный полиномиальные базисы) выполнялись с учетом кривизны сторон гексаэдров, непосредственно прилегающих к сфере.

На каждой из сеток путем агломераций образовывалась система из трех вложенных сеток, решения на которых получалось с использованием наименьшего кусочно-постоянного базиса. Далее уровни многосеточного алгоритма измельчались путем обогащения базиса, как это уже было

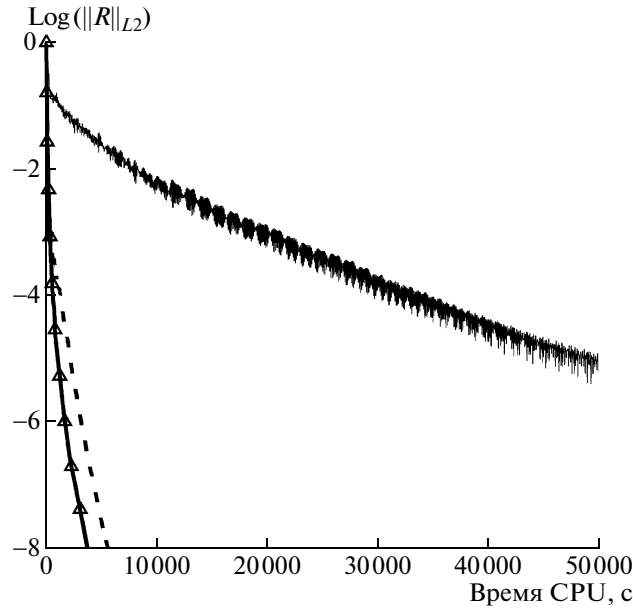


Фиг. 1.

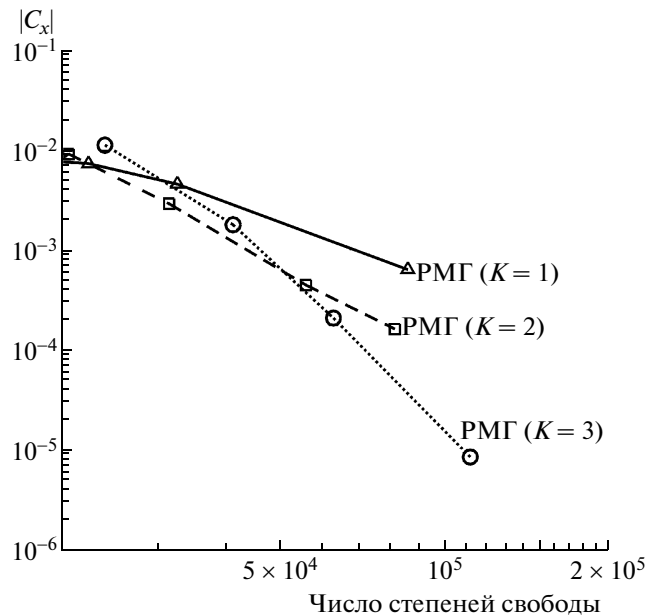
описано выше. Таким образом, расчеты методом РМГ ($K = 3$, кусочно-кубический базис) выполнялись с использованием шестиуровневого алгоритма.

Типичная история сходимости (зависимость L_2 -нормы невязки решения от времени CPU) представлена на фиг. 2 для случая кусочно-квадратичной ($K = 2$) аппроксимации решения. Осциллирующая кривая соответствует явной 5-шаговой схеме Рунге–Кутты. Применение многосеточного алгоритма ликвидирует осциллирующий характер сходимости и существенно уменьшает расчетное время. Две кривые сходимости в случае использования многосеточного алгоритма отличаются сглаживателем. Штриховая линия соответствует сглаживателю на основе метода Рунге–Кутты, а сплошная линия с маркерами показывает результаты использования более эффективного локально-неявного сглаживателя. Отметим, что при кусочно-кубичном базисе ($K = 3$) получение решения в разумное время без применения многосеточного алгоритма становится невозможным.

Построенный гибридный многосеточный метод позволил надежно рассчитать коэффициент сопротивления сферы на всей последовательности сеток с использованием полиномов высокого порядка. О качестве полученных решений можно судить по фиг. 3, где представлена зависимость величины коэффициента сопротивления от числа степеней свободы дискретной задачи, которое определяется как произведение числа ячеек сетки на число неизвестных в каждой ячейке (см. (1.4)). Известно, что в невязком течении величина сопротивления должна быть равна нулю и, таким образом, отличие расчетного коэффициента сопротивления от нуля косвенно характеризует качество расчетной схемы. Анализ результатов показал, что скорость стремления к нулю коэффициента сопротивления по мере сгущения сеток выше, чем $2K + 1$, что говорит о достиже-



Фиг. 2.



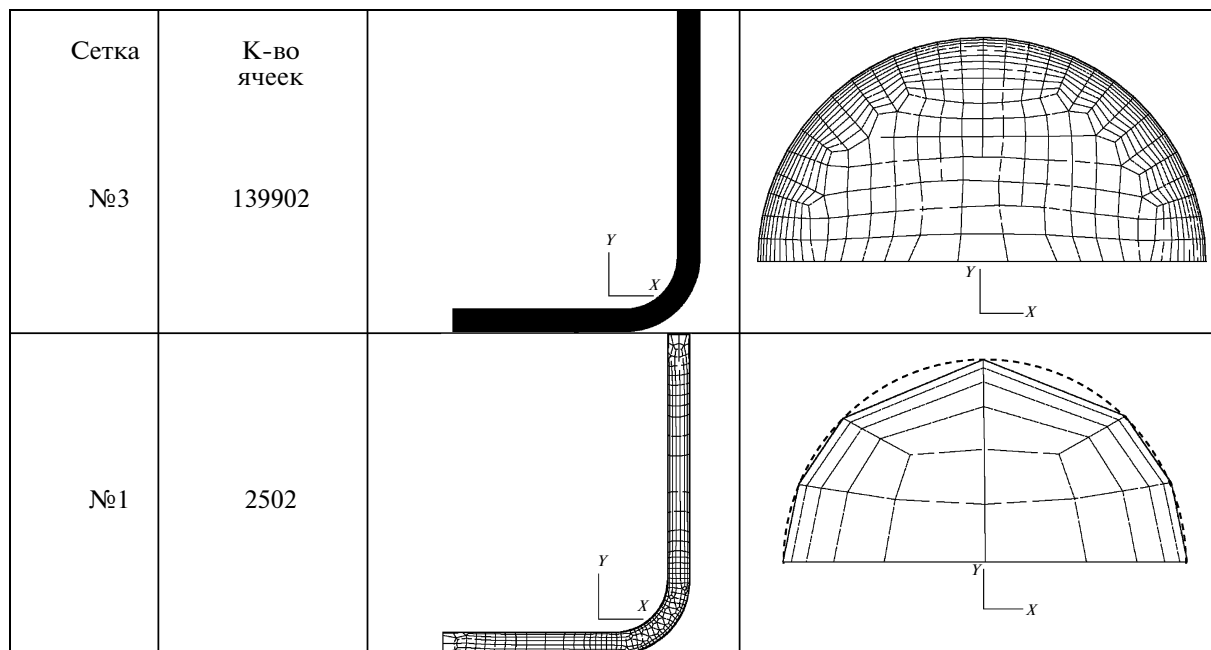
Фиг. 3.

нии теоретически обоснованной (см. [18]) суперсходимости конечно-элементного метода при оценке величины коэффициента аэродинамического сопротивления.

На самой густой из использованных сеток, содержащей 8148 ячеек, при применении кусочно-кубического базиса для реконструкции решения коэффициент сопротивления четверти сферы составил величину 3.2×10^{-6} . Получить такой низкий коэффициент сопротивления методом конечного объема чрезвычайно затруднительно. Например, использование кода FLUENT даже на сетке в 240000 узлов не позволило получить сопротивление сферы меньше, чем 2.1×10^{-4} .

4.2. Пространственное ламинарное течение в изогнутой трубке

Этот пространственный модельный случай для ламинарного течения воды внутри изогнутой под прямым углом трубки постоянного сечения был экспериментально исследован в [19] с по-



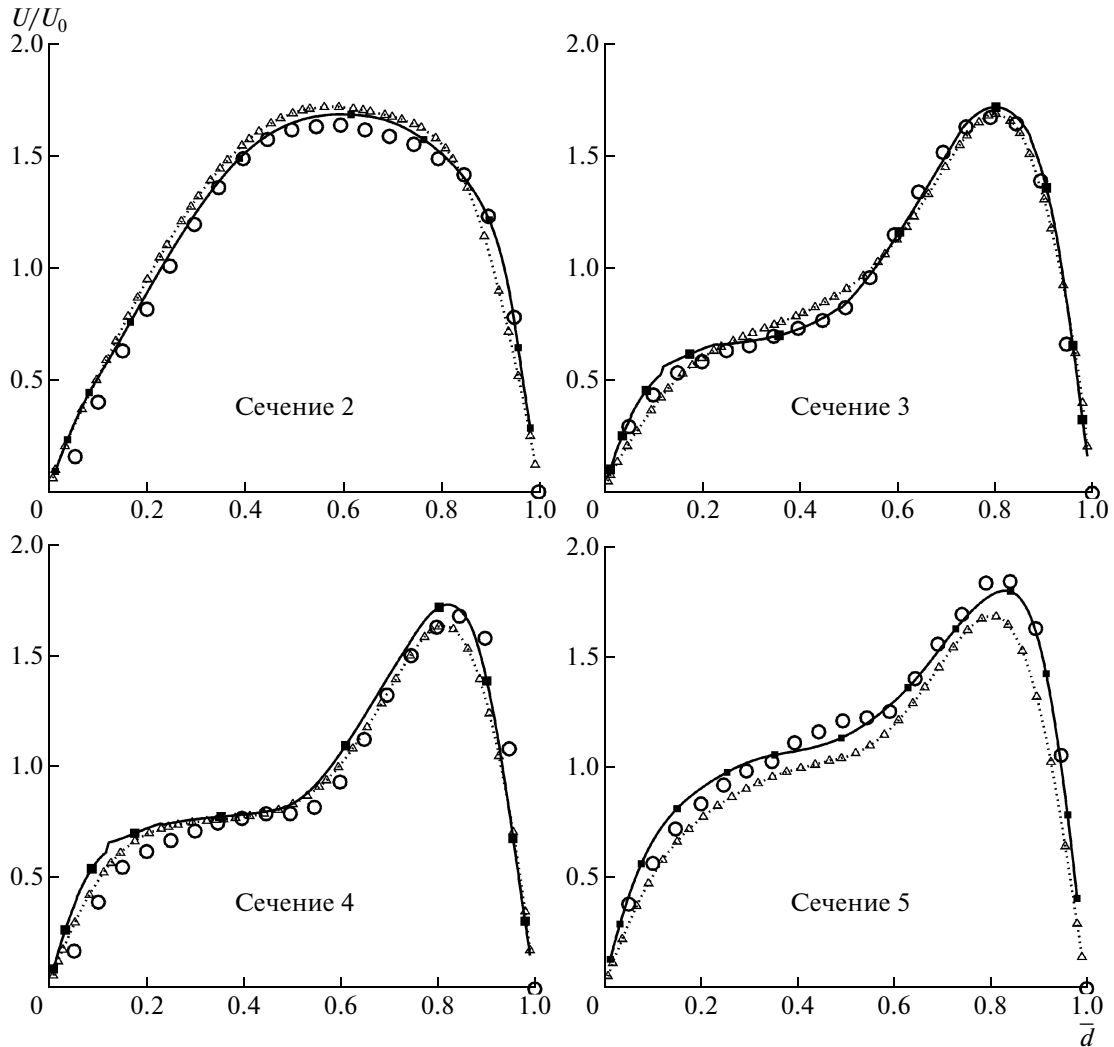
Фиг. 4.

мощью лазеро-доплеровского измерителя скорости. Результаты расчета и эксперимента сравнивались при числе Рейнольдса $Re = 500$. Установившееся течение в трубке определяется балансом вязких и невязких сил и характеризуется наличием пары вихрей, закрученных в противоположные стороны, образующихся вниз по потоку после прохождения трубчатого изгиба. Имеются экспериментально измеренные профили скорости в пяти сечениях вдоль трубки: сечение 1 расположено на 0.58 диаметра трубки вверх по потоку от изгиба, сечение 2 – в 30° по изгибу, сечение 3 – в 60° по изгибу, сечение 4 – в 75° по изгибу, сечение 5 – один диаметр вниз по потоку от изгиба.

Для исследований построены три неструктурированные гексаэдральные сетки. Грубая сетка № 1 содержит 2500 ячеек. Для РМГ ($K = 3$) на такой сетке задействованное количество степеней свободы равно 50000. С целью сравнений результатов РМГ и МКО построена также сетка № 2 с количеством узлов в 62000 ячеек и сетка № 3, содержащая 140000 ячеек. Некоторые фрагменты сеток представлены на фиг. 4. Видно, что полигональная граница грубой сетки № 1 существенно отклоняется от окружности. В расчетах вычисление интегралов граничных элементов выполнялось с учетом реальной границы, изображенной на этой фигуре пунктиром.

На фиг. 5 профили скорости вдоль различных сечений трубки, полученные по схеме РМГ ($K = 3$) на сетке № 1, сравниваются с аналогичными результатами, полученными МКО на сетке № 3. Отметим здесь, что результаты, полученные МКО на сетке № 2, с числом элементов, обеспечивающим равное количество степеней свободы с РМГ, весьма далеки от экспериментальных данных. На фиг. 5 экспериментальные результаты представлены кружочками. Линия с квадратными маркерами демонстрирует результаты РМГ ($K = 3$), в то время как пунктирная линия с треугольными маркерами показывает результаты МКО на сетке № 3. Отметим, что густота маркеров отражает густоту сетки, так как на одну ячейку приходится один маркер. Представленное сравнение демонстрирует эквивалентную точность расчетов по МКО и РМГ, а также их хорошее согласование с экспериментальными данными.

В табл. 2 представлено сравнение вычислительных затрат. Схема РМГ 4-го порядка точности на сетке № 1 расходует почти в 3 раза большее время по сравнению со схемой МКО на сетке № 2, обеспечивающей использование эквивалентного количества степеней свободы. Сравним общие времена расчетных схем, требуемые для получения результатов с одинаковой точностью, которая, как видно из фиг. 5, обеспечивается МКО на сетке № 3. Отметим, что в расчете на 50 итераций многосеточного алгоритма обе схемы затрачивают примерно одинаковое время. Расчет новым методом на грубой сетке позволяет использовать почти в два раза больший шаг по времени, а следовательно, до сходимости одинакового уровня требуется в два раза меньшее количество



Фиг. 5.

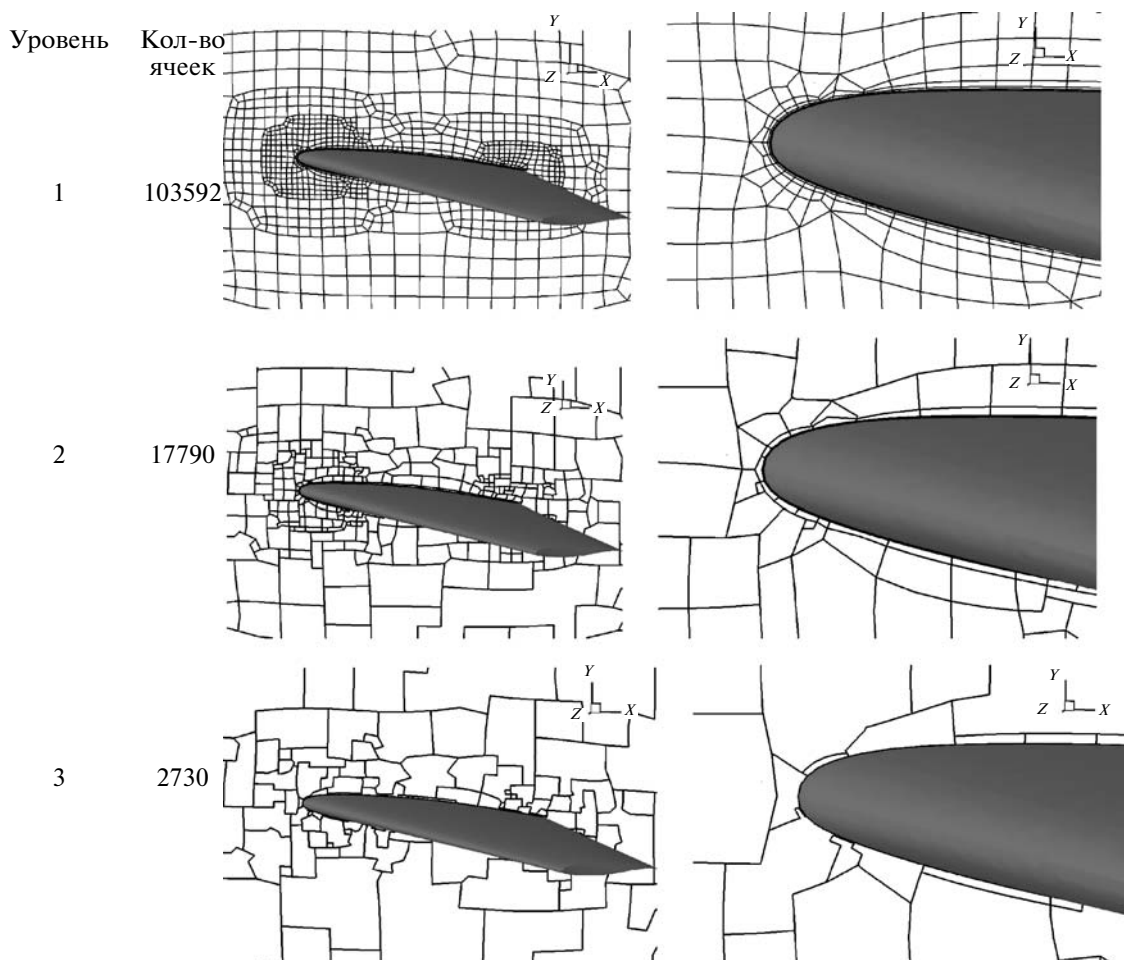
итераций. Таким образом, применение РМГ для решения этой задачи позволило сократить использование не только оперативной памяти, но и общее расчетное время.

4.3. Применение p -многосеточного метода к расчету обтекания крыла

p -Многосеточный алгоритм был применен к расчету дозвукового турбулентного обтекания крыла LANN (см. [20]). Одна из целей расчета состояла в сравнении конечно-элементного РМГ на основе кусочно-линейных базисных функций с методом конечного объема второго порядка

Таблица 2

Метод	Номер сетки	Количество ячеек	Количество степеней свободы	Отношение использованной памяти	Время на 50 MG итераций, с	Общее количество итераций	Отношение времен
РМГ $K=3$	1	2502	50040	0.36	1185	4375	0.47
МКО	2	62689	62689	0.45	496	7880	0.86
МКО	3	139902	139902	1.00	1115	9155	1.00



Фиг. 6.

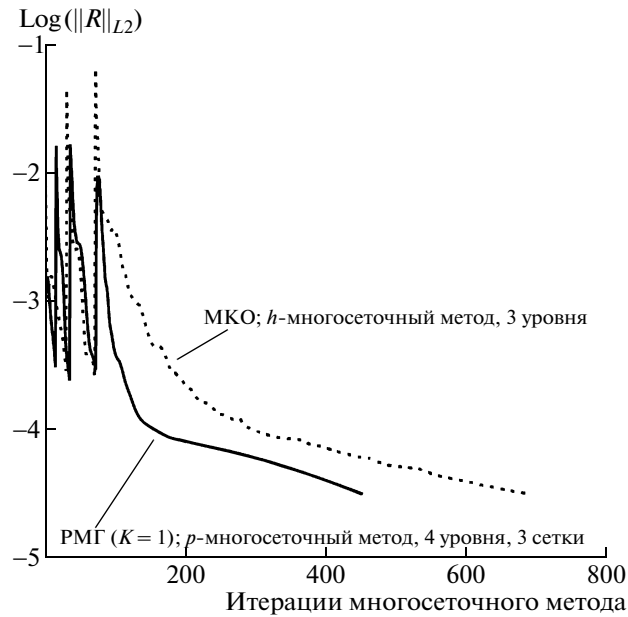
точности при условии расчета на сетках, обеспечивающих использование эквивалентного количества переменных.

Вычисления выполнены на неструктурированных гексаэдральных сетках. Сетка с числом элементов 190213 ячеек была использована для РМГ, в то время как расчеты МКО выполнялись на сетке с числом элементов 625076.

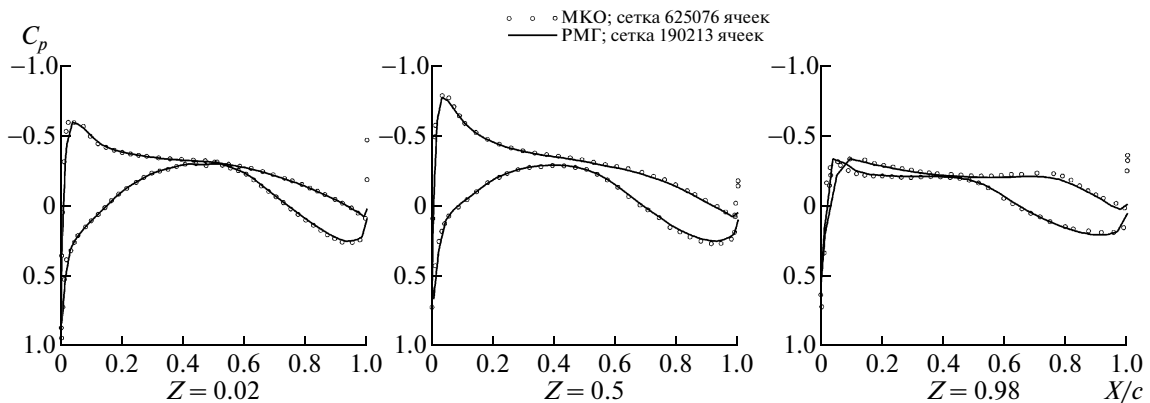
Использовались следующие условия для набегающего потока: число Маха $M = 0.4$, угол атаки $\alpha = 0.6^\circ$ и число Рейнольдса $Re = 7.17 \times 10^6$. Расчеты выполнены с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса, а начальный коэффициент отношения турбулентной вязкости к ламинарной на бесконечности равен 50.

Решение МКО в [16] получено с помощью 3-уровневого многосеточного метода. В РМГ использовался 4-уровневый p -многосеточный метод. Решение на первых трех уровнях получалось с кусочно-постоянными функциями. Затем на самой мелкой сетке (четвертый многосеточный уровень) решение получалось с использованием кусочно-линейных базисных функций. Фрагменты агломерированных сеток, использованных на начальных уровнях многосеточного подхода, представлены на фиг. 6.

Истории сходимости L_2 -нормы невязки по многосеточным итерациям для МКО и РМГ представлены на фиг. 7. Использование более грубой сетки в РМГ обеспечило меньшее количество многосеточных итераций и сравнимое расчетное время (~26 ч на персональном компьютере 2 ГГц). Это, в частности, свидетельствует об эффективности использованного многосеточного метода в РМГ.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Сравнение распределений давления в трех сечениях крыла представлено на фиг. 8. Видно, что оба подхода обеспечивают примерно одинаковые результаты, несмотря на использование более грубой сетки в РМГ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Галеркина с разрывными базисными функциями высокого порядка применен к решению уравнений Эйлера и Навье—Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. В работе подробно описан алгоритм p -многосеточного метода и приведены результаты тестовых расчетов, демонстрирующие его высокую эффективность для сокращения времени счета.

Применение схем высокого порядка точности приводит к большим затратам вычислительных ресурсов. Однако при сравнимом количестве степеней свободы точность схемы РМГ ($K=3$) заметно выше, чем точность традиционной схемы МКО. Реальный выигрыш РМГ в использовании вычислительных ресурсов (память, время) наблюдается при сравнении решений, полученных с одинаковой точностью.

Автор выражает признательность президенту компании NUMECA Хиршу (Hirsch) за предоставление промышленной программы МКО и помощь в проведении настоящих исследований, а также С.В. Ляпунову за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morrison J., Hemsch M.* Statistical analysis of CFD solutions from the 3rd // AIAA Drag Prediction Workshop, 3rd AIAA APA Drag Prediction Workshop, 2006. <http://aaac.larc.nasa.gov/tsab/cfdlarc/aiaa-dpw/Workshop3/presentations/index.html>.
2. *Волков А.В., Ляпунов С.В.* Исследование эффективности использования численных схем высокого порядка точности для решения уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 10. С. 1894–1907.
3. *Cockburn B., Karniadakis G., Shu C.-W.* Discontinuous Galerkin methods: Theory, computation and applications // Lect. Notes Comput. Sci. New York: Springer, 1999. P. 69–224.
4. *Petrovskaya N.B., Wolkov A.V.* The issues of the solution approximation in higher-order schemes on distorted grids // Internat. J. Comput. Meth. 2007. V. 4. № 2.
5. *Bassi F., Crivellini A., Di Pietro D.A., Rebay S.* A high-order discontinuous Galerkin solver for 3D aerodynamic turbulent flows // Proc. ECCOMAS CFD 2006 Conf. Sept. 2006.
6. *Luo H., Baum J.D., Löhner R.* A fast, p -multigrid discontinuous Galerkin method for compressible flows at all speeds: AIAA 2006-110.
7. *Wang Z.J.* High-order methods for the Euler and Navier–Stokes equations on unstructured grids // Progress in Aerospace Sci. 2007. V. 43. P. 1–41.
8. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 5. С. 922–927.
9. *Rönquist E.V., Patera A.T.* Spectral element multigrid. I. Formulation and numerical results // J. Scient. Comput. 1987. V. 2. № 4.
10. *Helenbrook B.T., Mavriplis D., Atkins H.L.* Analysis of p -multigrid for continuous and discontinuous finite element discretizations: AIAA Paper 2003-3989, 2003.
11. *Жуков В.Т., Феодоритова О.Б., Янг Д.П.* Итерационные алгоритмы для схем конечных элементов высокого порядка // Матем. моделирование. 2004. Т. 16. № 7. С. 117–128.
12. *Wang Li, Mavriplis D.J.* Implicit solution of the unsteady Euler equations for high-order accurate discontinuous Galerkin discretizations: AIAA 2006-109.
13. *Roe P.L.* Approximate Riemann problem solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. № 2. P. 357–372.
14. *Atkins H.L., Shu C.W.* Quadrature free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations // AIAA Journal. 1998. V. 36. № 5.
15. *Mavriplis D.J., Venkatakrishnan V.* Agglomeration multigrid for two dimensional viscous flows // Comput. and Fluids. 1995. V. 24. № 5. P. 553–570.
16. www.numeca.be
17. *Brandt A.* Multilevel adaptive computations in fluid dynamics // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 10.
18. *Barth T.J.* A posteriori estimation and mesh adaptivity for finite volume and finite element method // Lect. Notes in Comput. Sci. and Engng (LNCSE). 2004. V. 41.
19. *Enayet M., Gibson M., Taylor A., Yianneskis M.* Laser Doppler measurements of laminar and turbulent flow in a pipe bend: NASA Contract Rept. CR-3551, 1982.
20. *Müller U.R., Schulze B., Henke H.* Computation of transonic steady and unsteady flow about LANN wing. Validation of CFD codes and assessment of turbulence models: ECARP Rept. 58. P. 479–500. Vieweg, 1996.